

Đề thi chọn HSG QG của Ấn Độ năm 2021

Ngày thứ nhất

1. Giả sử $r \geq 2$ là một số nguyên, và $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots, m_r, n_r$ là $2r$ số nguyên thỏa mãn $|m_i n_j - m_j n_i| = 1$ với mỗi hai chỉ số i, j sao cho $1 \leq i < j \leq r$. Tìm giá trị lớn nhất của r .
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (a, b) sao cho cả hai đa thức $x^3 + ax + b$ và $x^3 + bx + a$ có tất cả nghiệm là số nguyên.
3. Betal đánh dấu 2021 điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, và vẽ tất cả các đoạn thẳng nối hai trong chúng. Sau đó anh ấy chọn 1011 đoạn bất kỳ trong các đoạn này, và đánh dấu các trung điểm của chúng. Cuối cùng, anh ấy chọn một đoạn có trung điểm chưa được đánh dấu, và đổ Vikram dựng trung điểm của nó bằng cách chỉ sử dụng thước kẻ. Hỏi Vikram có thể luôn làm được hay không?

Đề thi chọn HSG QG của Ấn Độ năm 2021

Ngày thứ hai

5. Một nhà ảo thuật và một thám tử chơi một trò chơi. Nhà ảo thuật đặt úp các thẻ được đánh số từ 1 đến 52 lên bàn. Ở mỗi nước đi, thám tử có thể chỉ vào hai thẻ và hỏi xem các số trên chúng có liên tiếp hay không. Nhà ảo thuật trả lời một cách trung thực. Sau một số hữu hạn lần đi, thám tử chỉ vào hai lá bài. Cô ấy thắng nếu các con số trên hai thẻ này là liên tiếp, và thua nếu ngược lại. Chứng minh rằng thám tử thắng nếu và chỉ khi cô ấy được đặt ít nhất 50 câu hỏi.
6. Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa mãn $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle BCA = 75^\circ$, $\angle ACD = 25^\circ$ và $CD = CB$. Kéo dài CB đến gặp đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại E . Chứng minh rằng $CE = BD$.
7. Tìm tất cả các ánh xạ $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ thỏa mãn các điều kiện sau:
 - (a) f ánh xạ đa thức không đến chính nó;
 - (b) với mỗi đa thức khác không P , $\deg f(P) \leq 1 + \deg P$;
 - (c) với mỗi hai đa thức P, Q , hai đa thức $P - f(Q)$ và $Q - f(P)$ có cùng tập nghiệm thực.