Đề thi chọn HSG QG của Canada năm 2021

1. Cho hình thang $ABCD$ với $AB||CD$, $|AB| > |CD|$ và $|AD| = |BC|$. Gọi I là tâm của đường tròn tiếp xúc với các đường thẳng AB, AC và BD, trong đó A và I nằm khác phía đối với BD. Gọi J là tâm của đường tròn tiếp xúc với CD, AC và BD, trong đó D và J nằm khác phía đối với AC. Chứng minh rằng $IC = JB$.

2. Cho số nguyên $n > 1$. Xét n số thực dương a_1, $a_2, \ldots,$ a_n thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1 + a_1} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}.$$

3. Tại một bữa tiệc, có N chủ nhà và N khách ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn, trong đó $N \geq 4$. Một cặp hai khách sẽ trò chuyện với nhau nếu có nhiều nhất một người ngồi giữa họ hoặc nếu có đúng hai người giữa họ, thì ít nhất một người trong số họ là chủ nhà. Chứng minh rằng bất kể $2N$ người ngồi thế nào, có ít nhất N cặp khách sẽ trò chuyện với nhau.

4. Một hàm f từ tập các số nguyên dương đến chính nó được gọi là *Canadian* nếu

$$(f(f(x)), f(x + y)) = (x, y)$$

với mỗi hai số nguyên dương x và y. Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho $f(m) = m$ với mỗi hàm Canadian f.

5. Nina và Tadashi chơi trò chơi sau. Ban đầu, một bộ ba (a, b, c) các số nguyên không âm với $a + b + c = 2021$ được viết trên bảng. Nina và Tadashi sau đó lần lượt chơi, Nina chơi trước. Một người chơi đến lượt của mình sẽ chọn một số nguyên dương k và một trong ba thành phần của bộ ba trên bảng, sau đó tăng thành phần được chọn thêm k và giảm hai thành phần còn lại k. Một người chơi là thua nếu trong lượt của họ, một thành phần nào đó âm.
Tìm số bộ ba (a, b, c) sao cho Tadashi có chiến lược chiến thắng.