

Đề thi chọn HSG QG của Trung Quốc năm 2021

Ngày thứ nhất

- Xét các dãy số phức $\{z_n\}_{n \geq 1}$ thỏa mãn số hạng ở vị trí lẻ là thực, số hạng ở vị trí chẵn là thuần ảo và với mỗi số nguyên dương k , $|z_k z_{k+1}| = 2^k$. Ký hiệu $f_n = |z_1 + z_2 + \dots + z_n|$, với $n = 1, 2, \dots$
 - Tìm giá trị nhỏ nhất của f_{2020} .
 - Tìm giá trị nhỏ nhất của $f_{2020} \cdot f_{2021}$.
- Cho số nguyên $m > 1$. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất n sao cho với mỗi $2n$ số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$, tồn tại các số nguyên x_1, x_2, \dots, x_n thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau
 - Tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ để x_i và m nguyên tố cùng nhau.
 - $\sum_{i=1}^n a_i x_i \equiv \sum_{i=1}^n b_i x_i \equiv 0 \pmod{m}$.
- Cho số nguyên dương n có đúng 36 ước nguyên tố. Với $k = 1, 2, 3, 4, 5$, gọi c_k là số các số nguyên nguyên tố cùng nhau với n trong $\left[\frac{(k-1)n}{5}, \frac{kn}{5}\right]$. Giả sử c_1, c_2, c_3, c_4 và c_5 không bằng nhau. Chứng minh rằng

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (c_i - c_j)^2 \geq 2^{36}.$$

Đề thi chọn HSG QG của Trung Quốc năm 2021

Ngày thứ hai

4. Trong tam giác nhọn ABC ($AB > AC$), M là trung điểm của cung BC , O là tâm của (ABC) và AK là đường kính của nó. Đường thẳng song song với AM qua O cắt đoạn AB tại D , và CA kéo dài tại E . Đường thẳng BM và CK cắt nhau tại P , đường thẳng BK và CM cắt nhau tại Q . Chứng minh rằng

$$\widehat{OPB} + \widehat{OEB} = \widehat{OQC} + \widehat{ODC}.$$

5. Cho đa diện lồi P có các tính chất sau

- (a) mỗi đỉnh thuộc đúng 3 mặt.
- (b) với mỗi số nguyên dương n , có một số chẵn các mặt với n đỉnh.

Một con kiến bò trên các cạnh của P và tạo thành một đường gấp khúc đóng không tự cắt, nó chia các mặt của đa diện này thành hai phần, sao cho với mỗi số nguyên dương n , số mặt với n đỉnh trên mỗi phần là bằng nhau. Chứng minh rằng số lần con kiến rẽ trái bằng số lần con kiến rẽ phải.

6. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho

$$f(f(x) + y) \mid x + f(y)$$

với mỗi hai số nguyên dương x và y .