Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Trung Quốc

Test 1 - Day 1

1. Cho hai số nguyên dương m và n. Xét các số thực không âm $a_{i,j}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ thỏa mãn
$$a_{i,1} \geq a_{i,2} \geq \cdots \geq a_{i,n}$$
và $a_{1,j} \geq a_{2,j} \geq \cdots \geq a_{m,j}$ với mọi $1 \leq i \leq m$ và $1 \leq j \leq n$. Ký hiệu
$$X_{i,j} = a_{1,j} + \cdots + a_{i-1,j} + a_{i,j} + a_{i,j-1} + \cdots + a_{i,1},$$
$$Y_{i,j} = a_{m,j} + \cdots + a_{i+1,j} + a_{i,j} + a_{i,j+1} + \cdots + a_{i,n}.$$
Chứng minh rằng
$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} X_{i,j} \geq \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} Y_{i,j}.$$

2. Cho hai số nguyên dương n và k thỏa mãn $n > k^2 > 4$. Trong một bảng ô vuông $n \times n$, một $k-$*nhóm* là một tập k ô vuông con nằm trong các dòng và cột khác nhau. Tìm số nguyên dương N lớn nhất sao cho có thể chọn N ô vuông con trong bảng và tô màu chúng để: trong mỗi $k-$nhóm từ N ô vuông con đã được tô màu, có hai ô vuông con cùng màu và hai ô vuông con khác màu.

3. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng với mỗi n số nguyên a_1, a_2, $\cdots$, a_n, ít nhất $\lceil \dfrac{n(n-6)}{19} \rceil$ số trong $\{1, 2, \cdots, \dfrac{n(n-1)}{2}\}$ không thể biểu diễn được dưới dạng $a_i - a_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$.

Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Trung Quốc

Test 1 - Day 2

4. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức với hệ số nguyên. Biết rằng với vô hạn số nguyên tố p, tồn tại số nguyên m_p sao cho
$$f(a) \equiv g(a + m_p) \pmod p$$
với mọi số nguyên a. Chứng minh rằng tồn tại số hữu tỷ r sao cho
$$f(x) = g(x + r).$$

5. Cho tam giác ABC, và một đường tròn Ω tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại B, C. Điểm D là trung điểm của AC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Một đường tròn Γ qua A, C cắt cung nhỏ BC của Ω tại P, và cắt AB tại Q. Biết rằng trung điểm R của cung nhỏ PQ có tính chất $CR \perp AB$. Tia PQ cắt AC tại L, M là trung điểm của AL, N là trung điểm của DR, và X là hình chiếu vuông góc của M trên ON. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DNX đi qua tâm của Γ.

6. Cho số nguyên dương n và r số nguyên tố đôi một khác nhau p_1, p_2, $\cdots$, p_r. Lúc đầu, có $(n+1)^r$ số được viết trên bảng là $p_1^{i_1}p_2^{i_2}\cdots p_r^{i_r}$ với $0 \leq i_1$, i_2, $\cdots$, i_r $\leq n$.
Alice và Bob chơi một trò chơi nhau sau: Họ luân phiên thực hiện lượt chơi của mình, Alice đi đầu. Với lượt chơi của Alice, cô ấy xóa hai số a, b (không cần khác nhau) và viết (a, b). Với lượt chơi của Bob, anh ấy xóa hai số a, b (không cần khác nhau) và viết $[a, b]$. Trò chơi kết thúc khi trên bảng chỉ còn một số.
Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương M sao cho Alice có thể đảm bảo số còn lại không lớn hơn M.

Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Trung Quốc

Test 2 - Day 1

7. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn Γ và thỏa mãn $AB + BC = AD + DC$. Gọi E là điểm chính giữa của cung BCD, và F $(\neq C)$ là antipode của A đối với Γ. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC, đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BCD. Giả sử có điểm P thỏa mãn $\triangle BIC \overset{+}{\sim} \triangle KPJ$. Chứng minh rằng EK và PF cắt nhau trên Γ.

8. Cho hai số nguyên dương $n > 1$ và k. Tìm số c nhỏ nhất có tính chất: Với mỗi số nguyên dương m và kn-đều graph G với m đỉnh, có thể tô màu các đỉnh của G bằng n màu sao cho số cạnh đơn sắc không vượt quá cm.

9. Cho các số nguyên dương a, b và c đôi một nguyên tố cùng nhau. Gọi $f(n)$ là số nghiệm tự nhiên của phương trình $ax + by + cz = n$. Chứng minh rằng tồn tại các hằng số thực α, β và γ sao cho

$$|f(x) - \left(\alpha n^2 + \beta n + \gamma\right)| < \frac{1}{12}(a + b + c)$$

với mỗi số tự nhiên n.

Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Trung Quốc

Test 2 - Day 2

10. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ sao cho với mỗi hai số nguyên dương $m \geq n$, $f(m\varphi(n^3)) = f(m) \cdot \varphi(n^3)$.

11. Cho số nguyên dương n và các số thực dương a_1, $a_2, \dots,$ a_{2n+1}. Với $k = 1$, 2, $\dots$, $2n+1$, ký hiệu

$$b_k = \max_{0 \leq m \leq n} \left(\frac{1}{2m+1} \sum_{i=k-m}^{k+m} a_i \right),$$

trong đó chỉ số lấy theo modulo $2n+1$. Chứng minh rằng số chỉ số k thỏa mãn $b_k \geq 1$ không vượt quá $2 \sum_{i=1}^{2n+1} a_i$.

12. Tìm số thực dương a nhỏ nhất có tính chất: Với mỗi ba điểm A, B và C thuộc đường tròn đơn vị, tồn tại một tam giác đều PQR cạnh a sao cho A, B và C nằm trong hoặc trên biên tam giác PQR.

Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Trung Quốc

Test 3 - Day 1

13. Cho số nguyên $n \geq 5$ và một đa giác lồi P, đó là $A_1A_2...A_n$. Chứng minh rằng có thể chọn một điểm trong mỗi tứ giác $A_iA_jA_kA_l$ $(1 \leq i < j < k < l \leq n)$, sao cho C_n^4 điểm được chọn đôi một khác nhau và mỗi đoạn thẳng nối hai trong chúng cắt một đường chéo nào đó của P.

14. Cho các số nguyên dương phân biệt a_1, a_2, $\ldots$, a_{2020}. Với $n \geq 2021$, a_n là số nguyên dương nhỏ nhất khác $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ mà không chia hết $a_{n-2020} \ldots a_{n-2}a_{n-1}$. Chứng minh rằng mọi số nguyên đủ lớn đều xuất hiện trong dãy.

15. Tìm số thực C lớn nhất sao cho với mọi số nguyên $n \geq 2$, tồn tại x_1, $x_2, \ldots,$ $x_n \in [-1, 1]$ để
$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \geq C^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Trung Quốc

Test 3 - Day 2

16. Với mỗi số nguyên dương x, ký hiệu $\omega(x)$ là số ước nguyên tố phân biệt của x và $\Omega(x)$ là số ước nguyên tố (kể cả bội) x. Chứng minh rằng

$$\sum_{m=1}^{n} 5^{\omega(m)} \leq \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \tau(k)^2 \leq \sum_{m=1}^{n} 5^{\Omega(m)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

17. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$f(xf(y) + y^3) = yf(x) + f(y)^3, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

18. Một tam giác trong mặt phẳng tọa độ được gọi là *tam giác lưới* nếu các tọa độ của các đỉnh của nó là các cặp số nguyên. Một điểm trong mặt phẳng tọa độ được gọi là $m-$*lưới* ($m \in \mathbb{Z}$) nếu tọa độ của nó có các thành phần là các số nguyên chia hết cho m.
Chứng minh rằng tồn tại hằng số λ sao cho với mỗi số nguyên dương $m > 1$ và mỗi tam giác lưới T, nếu T chứa đúng một điểm $m-$lưới bên trong nó thì T có diện tích không lớn hơn λm^3.

Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Trung Quốc

Test 4 - Day 1

19. Cho số nguyên $n > 1$. Tìm số nguyên dương m nhỏ nhất sao cho tồn tại các số thực x_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

    (a) Với mọi $1 \leq i < j \leq n, x_{ij} = \max\{x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ij}\}$ hoặc
    $$x_{ij} = \max\{x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{ij}\}.$$

    (b) Với mọi $1 \leq i \leq n$, có nhiều nhất m chỉ số k để
    $$x_{ik} = \max\{x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik}\}.$$

    (c) Với mọi $1 \leq j \leq n$, có nhiều nhất m chỉ số k để
    $$x_{kj} = \max\{x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{kj}\}.$$

20. Cho tam giác ABC $(AB < AC)$ với tâm nội tiếp I và nội tiếp đường tròn $\odot O$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cung BAC và BC. Điểm D nằm trên $\odot O$ sao cho $AD||BC$, và E là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC với BC. Điểm F nằm trong tam giác ABC sao cho $FI||BC$ và $\angle BAF = \angle EAC$. Kéo dài NF đến gặp $\odot O$ tại G, kéo dài AG đến gặp IF tại L. AF cắt DI tại K. Chứng minh rằng $ML \perp NK$.

21. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 2$ và số hữu tỷ $\beta \in (0, 1)$ có tính chất: Tồn tại các số nguyên dương a_1, a_2, $\ldots a_n$ sao cho với mỗi $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ có ít nhất hai phần tử,
    $$S(\sum_{i\in I} a_i) = \beta \sum_{i\in I} S(a_i).$$

    Ở đây $S(n)$ ký hiệu tổng các chữ số của n trong hệ thập phân.

Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Trung Quốc

Test 4 - Day 2

22. Xét các số $x_1, x_2, ..., x_{60} \in [-1, 1]$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2(x_{i+1} - x_{i-1}),$$

ở đây chỉ số lấy theo modulo 60.

23. Tìm số thực α nhỏ nhất sao cho với mỗi đa giác lồi P có diện tích 1, tồn tại điểm M trong mặt phẳng để diện tích của bao lồi của $P \cup Q$ không vượt quá α, ở đây Q là ảnh của P qua phép đối xứng tâm M.

24. Cho số nguyên $n \geq 2$ và $2n^2$ kỳ thủ trong một giải đấu cờ, mỗi hai kỳ thủ gặp nhau đúng một ván. Biết rằng

    (a) Nếu A thắng B và B thắng C, thì A thắng C.

    (b) có không quá $\dfrac{n^3}{16}$ ván hòa.

    Chứng minh rằng có thể chọn n^2 kỳ thủ và đánh số họ là P_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$, sao cho với mỗi $i, j, i', j' \in \{1, 2, ..., n\}$, nếu $i < i'$ thì P_{ij} thắng $P_{i'j'}$.