

## Đề thi chọn HSG QG của Nhật Bản năm 2021

1. Tìm tất cả các hàm  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  sao cho

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad n \mid m \iff f(n) \mid f(m) - n.$$

2. Cho số nguyên  $n > 1$ . Hai người  $A$  và  $B$  chơi một trò chơi trên bảng ô vuông  $n \times 2021$ . Đầu tiên  $A$  tô mỗi ô vuông con bởi bằng đen hoặc trắng.  $B$  đặt một viên đá vào một ô ở hàng trên cùng và chọn một ô ở hàng dưới cùng, gọi là *mục tiêu*. Sau đó,  $A$  dùng thao tác sau  $n - 1$  lần:

- (a) Nếu ô chứa viên đá là trắng thì chuyển viên đá xuống ô dưới.  
(b) Nếu không, chuyển viên đá sang ô bên trái hoặc phải, sau đó chuyển xuống ô bên dưới.

Tìm giá trị nhỏ nhất của  $n$  sao cho  $A$  có thể chuyển viên đá đến mục tiêu cho dù  $B$  có chơi thế nào.

3. Các điểm  $D, E$  lần lượt thuộc các cạnh  $AB, AC$  của tam giác nhọn  $ABC$  sao cho  $BD = CE$ . Lấy  $P$  trên đoạn  $DE$  và  $Q$  trên cung  $BC$  không chứa  $A$  của  $(ABC)$  sao cho  $BP/PC = EQ/QD$ . Biết các điểm  $A, B, C, D, E, P$  và  $Q$  đôi một khác nhau, chứng minh rằng

$$\angle BPC = \angle BAC + \angle EQD.$$

4. Xét 2021 số nguyên  $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$  thỏa mãn

$$a_{n+5} + a_n > a_{n+2} + a_{n+3}$$

với mọi  $n = 1, 2, \dots, 2016$ , Tìm giá trị nhỏ nhất của hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất trong các số  $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ .

5. Cho số nguyên dương  $n$  và một bảng ô vuông  $2n \times 2n$ . Tìm tất cả  $k \in [2n^2]$  sao cho khi tô  $k$  ô vuông của bảng màu đen và các ô còn lại màu trắng, thì số nhỏ nhất các hình vuông  $2 \times 2$  trong bảng chứa 2 ô đen và 2 ô trắng bằng  $2n - 1$ .