

## Đề thi chọn HSG QG của Mỹ năm 2021

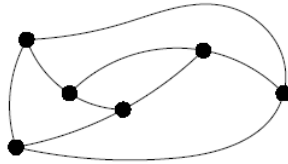
Ngày thứ nhất

1. Các hình chữ nhật  $BCC_1B_2$ ,  $CAA_1C_2$ , và  $ABB_1A_2$  được vẽ bên ngoài tam giác nhọn  $ABC$ . Chứng minh rằng nếu

$$\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180^\circ$$

thì  $B_1C_2$ ,  $C_1A_2$ , và  $A_1B_2$  đồng quy.

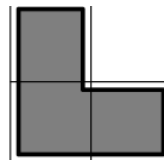
2. Vườn quốc gia là một tập hợp con của mặt phẳng gồm một số đường gấp nhau tại các nút. Mỗi đường đều có hai đầu là hai nút và mỗi nút là đầu của đúng ba đường. Các đường chỉ giao nhau tại các nút và không có các đường có cùng hai đầu. Dưới đây là một ví dụ với 9 đường và 6 nút.



Một du khách đi dạo trong công viên như sau: cô ấy bắt đầu ở một nút và bắt đầu đi dọc theo một đường. Ở cuối đường đầu tiên đó, cô ấy đi đến một nút và rẽ trái. Ở nút tiếp theo, cô ấy rẽ phải,..., luân phiên rẽ trái và phải ở mỗi nút. Cô ấy làm điều này cho đến khi quay trở lại nút ban đầu. Số lần lớn nhất có thể mà cô ấy đi vào các nút là bao nhiêu?

3. Cho số nguyên  $n \geq 2$  và một bảng ô vuông  $n \times n$  trống lúc ban đầu. Mỗi phút, bạn có thể thực hiện một trong ba thao tác sau:

- (a) Nếu có một  $L$ -tromino không có viên đá nào (xem hình dưới, không được quay  $L$ -tromino), bạn có thể đặt một viên đá vào mỗi ô vuông con.



- (b) Nếu tất cả các ô vuông con trong một cột có đá, bạn có thể bỏ tất cả đá từ cột đó.
- (c) Nếu tất cả các ô vuông trong một hàng có đá, bạn có thể bỏ tất cả đá từ hàng đó.

Tìm tất cả các số  $n$  sao cho sau một số khác 0 lần thao tác, bảng không có đá.

## Đề thi chọn HSG QG của Mỹ năm 2021

Ngày thứ hai

4. Một tập hữu hạn  $S$  các số nguyên dương có tính chất: với mỗi  $s \in S$  và mỗi ước dương  $d$  của  $s$ , có đúng một  $t \in S$  sao cho  $(s, t) = d$ . Tìm các giá trị có thể có của  $|S|$ .
5. Cho số nguyên  $n \geq 4$ . Tìm nghiệm thực dương của hệ  $2n$  phương trình:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_2}, & a_2 &= a_1 + a_3, \\ a_3 &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}, & a_4 &= a_3 + a_5, \\ a_5 &= \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6}, & a_6 &= a_5 + a_7 \\ &\vdots & &\vdots \\ a_{2n-1} &= \frac{1}{a_{2n-2}} + \frac{1}{a_{2n}}, & a_{2n} &= a_{2n-1} + a_1 \end{aligned}$$

6. Cho lục giác lồi  $ABCDEF$  có tính chất  $AB \parallel DE$ ,  $BC \parallel EF$ ,  $CD \parallel FA$  và

$$AB \cdot DE = BC \cdot EF = CD \cdot FA.$$

Gọi  $X$ ,  $Y$  và  $Z$  lần lượt là trung điểm của  $AD$ ,  $BE$  và  $CF$ . Chứng minh rằng tâm của  $(ACE)$ , tâm của  $(BDF)$  và trục tâm của tam giác  $XYZ$  thẳng hàng.