

Đề thi chọn HSG QG của Việt Nam năm 2021

Ngày thứ nhất

1. Cho dãy (x_n) thỏa mãn $x_1 \in (0; \frac{1}{2})$ và $x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3, \quad \forall n \geq 1$.
 - (a) Chứng minh rằng $\lim x_n = 0$.
 - (b) Với mỗi n , đặt $y_n = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$. Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn.

2. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x)f(y) = f(xy - 1) + xf(y) + yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Cho tam giác nhọn không cân ABC có trực tâm H và các đường cao AD, BE, CF . Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF . K, J lần lượt là trung điểm của BC, EF . Cho HJ cắt lại (I) tại G, GK cắt lại (I) tại L .

- (a) Chứng minh $AL \perp EF$.
- (b) Cho AL cắt EF tại M, IM cắt lại (IEF) tại N, DN cắt AB và AC lần lượt tại P và Q . Chứng minh rằng PE, QF và AK đồng quy.

4. Với số nguyên $n > 1$, gọi $s(n)$ là tổng tất cả các số nguyên dương không vượt quá n và không nguyên tố cùng nhau với n . Chứng minh rằng

- (a) $s(n) = \frac{n}{2}(n + 1 - \varphi(n)), \quad \forall n > 1$.

- (b) không tồn tại số nguyên $n > 1$ để $s(n) = s(n + 2021)$.

Đề thi chọn HSG QG của Việt Nam năm 2021

Ngày thứ hai

5. Cho đa thức $P(x) = a_{21}x^{21} + a_{20}x^{20} + \dots + a_1x + a_0$ với các hệ số thuộc $[1011; 2021]$. Biết c có nghiệm nguyên và c là một số dương sao cho $|a_{k+2} - a_k| \leq c$ với mọi $k = 0, 1, \dots, 19$. Chứng minh rằng
- (a) $P(x)$ có đúng một nghiệm nguyên.
 - (b)
$$\sum_{k=0}^{10} (a_{2k+1} - a_{2k})^2 \leq 440c^2.$$
6. Một học sinh chia tất cả 30 viên bi vào 5 cái hộp được đánh số 1, 2, 3, 4, 5 (sau khi chia có thể có hộp không chứa viên nào).
- (a) Hỏi có bao nhiêu cách chia?
 - (b) Sau khi chia, học sinh này sơn 30 viên bi bởi một số màu (mỗi viên được sơn đúng một màu, một màu có thể sơn cho nhiều viên bi), sao cho không có 2 viên bi nào trong cùng một hộp có màu giống nhau và từ 2 hộp bất kỳ không thể chọn ra được 8 viên bi được sơn bởi 4 màu. Chứng minh rằng với mọi cách chia, học sinh đều phải dùng không ít hơn 10 màu.
 - (c) Hãy chỉ ra một cách chia sao cho học sinh đó có thể dùng 10 màu.
7. Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi D là giao điểm của hai tiếp tuyến tại B, C của (O) . Đường tròn qua A tiếp xúc với BC tại B cắt trung tuyến qua A tại G . Cho BG, CG lần lượt cắt CD, BD tại E, F .
- (a) Đường thẳng đi qua trung điểm của BE, CF cắt BF, CE lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng bốn điểm A, D, M và N cùng nằm trên một đường tròn.
 - (b) Cho AD, AG lần lượt cắt lại $(DBC), (GBC)$ tại H, K . Trung trực của HK, HE, HF cắt BC, CA, AB lần lượt tại R, P, Q . Chứng minh rằng R, P và Q thẳng hàng.