Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Việt Nam

Ngày thứ nhất

1. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1$ và với mỗi số nguyên dương n, $a_{2n} = a_n$ và $a_{2n+1} = a_n + 1$.

   (a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $a_{kn} = a_n$ với mọi số nguyên dương $k \leq n$.

   (b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương m sao cho $a_{km} \geq a_m$ với mọi số nguyên dương k.

   (7 điểm)

2. Cho bảng ô vuông kích thước 2021×2021. Tìm giá trị lớn nhất của số nguyên dương k sao cho có thể đánh dấu được k ô vuông của bảng mà mỗi ô trong số k ô đó có chung đỉnh với tối đa 1 ô được đánh dấu.

   (7 điểm)

3. Cho tam giác ABC và điểm N không trùng với các điểm A, B, C. Gọi A_b là điểm đối xứng với A qua đường thẳng NB, còn B_a là điểm đối xứng với B qua đường thẳng NA. Xác định tương tự với hai cặp điểm còn lại là B_c, C_b và C_a, A_c. Đường thẳng m_a qua N và vuông góc với B_cC_b. Xác định tương tự với m_b, m_c.

   (a) Giả sử N là trực tâm của tam giác ABC, chứng minh rằng ba đường thẳng đối xứng với các đường m_a, m_b, m_c lần lượt qua phân giác góc $\angle BNC$, $\angle CNA$, $\angle ANB$ trùng nhau.

   (b) Giả sử N là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC, chứng minh rằng ba đường thẳng đối xứng với m_a, m_b, m_c lần lượt qua BC, CA, AB đồng quy tại một điểm.

   (7 điểm)

Đề thi chọn đội tuyển IMO 2021 của Việt Nam

Ngày thứ hai

4. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn

$$2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)=5(a+b+c).$$

Chứng minh rằng $4(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)+7abc \leq 25$.

(7 điểm)

5. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định, điểm A di động trên (O) sao cho ABC nhọn và không cân. Gọi I là trung điểm BC và kẻ các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC. Trên tia FA, EA lấy các điểm M, N sao cho $FM = CE$, $EN = BF$. Giả sử MN cắt EF tại L, (LEN) cắt lại (LFM) tại G.

   (a) Chứng minh rằng đường tròn (MNG) luôn đi qua một điểm cố định.

   (b) Giả sử AD cắt lại (O) tại K. Trên tiếp tuyến qua D của (DKI), lấy các điểm P, Q sao cho $GP \parallel AB, GQ \parallel AC$. Gọi T là tâm của đường tròn (GPQ). Chứng minh rằng đường thẳng GT luôn đi qua một điểm cố định.

(7 điểm)

6. Cho số nguyên $n > 2$, số nguyên tố $p > 6^{n-1} - 2^n + 1$ và tập hợp S gồm n số nguyên phân biệt modulo p. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên c sao cho có đúng hai bộ ba (x, y, z) với các thành phần phân biệt thuộc S để

$$x - y + z \equiv c \pmod{p}.$$

(7 điểm)