Thứ Hai, 19. Tháng Bảy 2021

Bài 1. Cho số nguyên $n \geqslant 100$. Toshi viết mỗi số $n, n+1, \ldots, 2n$ lên một tấm thẻ khác nhau. Anh ta tráo $n+1$ tấm thẻ này và chia chúng thành hai phần. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phần có chứa hai tấm thẻ với tổng của hai số trên đó là một số chính phương.

Bài 2. Chứng minh rằng bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

đúng với mọi số thực $x_1, \ldots, x_n$.

Bài 3. Cho D là một điểm trong của tam giác nhọn ABC với $AB > AC$ sao cho $\angle DAB = \angle CAD$. Điểm E nằm trên đoạn thẳng AC thoả mãn $\angle ADE = \angle BCD$, điểm F nằm trên đoạn thẳng AB thoả mãn $\angle FDA = \angle DBC$ và điểm X nằm trên đường thẳng AC thoả mãn $CX = BX$. Gọi O_1 và O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ADC và EXD. Chứng minh rằng các đường thẳng BC, EF và O_1O_2 đồng quy.

Language: Vietnamese

Thời gian: 4 giờ 30 phút.
Mỗi bài được 7 điểm.

Thứ Ba, 20. Tháng Bảy 2021

Bài 4. Cho đường tròn Γ có tâm I và tứ giác lồi $ABCD$ sao cho mỗi đoạn thẳng AB, BC, CD và DA tiếp xúc với Γ. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác AIC. Tia BA cắt Ω tại X (không thuộc đoạn thẳng BA), tia BC cắt Ω tại Z (không thuộc đoạn thẳng BC). Tia AD và CD lần lượt cắt Ω tại Y (không thuộc đoạn thẳng AD) và T (không thuộc đoạn thẳng CD). Chứng minh rằng

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Bài 5. Hai bạn sóc, Grace và Jumpy, đi nhặt 2021 hạt dẻ cho mùa đông. Jumpy đánh số các hạt dẻ từ 1 đến 2021, và đào 2021 lỗ nhỏ theo hình vòng tròn xung quanh một gốc cây yêu thích của hai bạn. Sáng hôm sau, Jumpy phát hiện ra rằng Grace đã bỏ vào mỗi lỗ nhỏ một hạt dẻ nhưng không để ý đến các số ghi trên các hạt dẻ. Jumpy quyết định sắp xếp lại các hạt dẻ bằng cách thực hiện một dãy gồm 2021 bước. Trong bước thứ k, Jumpy đổi chỗ hai hạt dẻ ở ngay bên cạnh của hạt dẻ được đánh số k. Chứng minh rằng tồn tại giá trị k sao cho trong bước thứ k, Jumpy đổi chỗ hai hạt dẻ được đánh số a và b với $a < k < b$.

Bài 6. Cho $m \geqslant 2$ là một số nguyên, A là một tập hợp hữu hạn các số nguyên (không nhất thiết dương), và $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ là các tập con của A. Giả sử rằng với mỗi $k = 1, 2, \ldots, m$, tổng các phần tử của B_k là m^k. Chứng minh rằng A có ít nhất $m/2$ phần tử.

Language: Vietnamese

Thời gian: 4 giờ 30 phút.
Mỗi bài được 7 điểm.