

Đề thi chọn HSG QG của Bungari năm 2021

Ngày thứ nhất

- Một thành phố có 4 đại lộ ngang và $n \geq 3$ đại lộ dọc giao nhau tại $4n$ ngã tư. Các ngã tư chia mỗi đại lộ ngang thành $n - 1$ con đường và mỗi đại lộ dọc thành 3 con đường. Thị trưởng thành phố quyết định đóng một số nhỏ nhất có thể các ngã tư sao cho thành phố không có một đường khép kín nào (nghĩa là bắt đầu từ mỗi đường, chỉ đi qua các ngã tư mở và không quay lại, bạn không thể trở lại đường lúc đầu).
 - Chứng minh rằng có đúng n ngã tư được đóng.
 - Chứng minh rằng nếu từ mỗi đường bạn có thể đi đến mỗi đường khác và không ngã tư ở góc nào bị đóng thì có đúng 3 ngã tư trên biên bị đóng.
- Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một điểm T được lấy trên đường cao hạ từ C của tam giác ABC sao cho $\angle TBA = \angle ACB$. Giả sử đường thẳng CO cắt đoạn AB tại K , chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng AB , đường cao hạ từ A của tam giác ABC và KT đồng quy.
- Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ sao cho

$$f(f(x) + y)f(x) = f(xy + 1), \quad \forall x, y \in (0; +\infty).$$

Đề thi chọn HSG QG của Bungari năm 2021

Ngày thứ hai

4. Cho hai cấp số cộng tăng (a_n) và (b_n) thỏa mãn: có vô hạn cặp chỉ số (i, j) sao cho $i \leq j \leq i + 2021$ và $a_i \mid b_j$. Chứng minh rằng với mỗi chỉ số i , tồn tại chỉ số j để $a_i \mid b_j$.
5. Tồn tại hay không một tập S gồm 100 điểm trong mặt phẳng sao cho trọng tâm của mỗi 10 điểm thuộc S cũng thuộc S ?
6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn k với $AC > BC$. Điểm S là điểm chính giữa của cung ACB của k , và điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng SI cắt lại k tại T . Gọi D là điểm đối xứng với I qua T và M là trung điểm của AB . Đường thẳng IM cắt đường thẳng qua D song song với AB tại E . Chứng minh rằng $AE = BD$.